



CONHECIMENTOS DE PROBABILIDADE SUBJETIVA APRESENTADOS POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

HIGH SCHOOL STUDENTS' KNOWLEDGE OF SUBJECTIVE PROBABILITY

Anderson Rodrigo Oliveira da Silva¹

José Ivanildo Felisberto de Carvalho²

DOI: 10.5281/zenodo.13336631

Resumo

Este artigo é um recorte de pesquisa de mestrado³ que analisou os conhecimentos de probabilidade subjetiva de estudantes do Ensino Médio por meio da aplicação de um questionário. Para isso, o mesmo foi elaborado contemplando duas faces do significado subjetivo: a probabilidade como grau de crença e a utilização de algoritmos probabilísticos para embasar opiniões a respeito de um evento. O estudo se caracteriza como qualitativo, de natureza de campo. Participaram da pesquisa 10 estudantes de Ensino Médio de uma escola pública localizada no agreste de Pernambuco. Os resultados apontam para uma compreensão satisfatória dos estudantes em relação às variações do significado subjetivo de probabilidade, com maior dificuldade voltada à elaboração dos cálculos probabilísticos. Constataram-se subsídios que apontam para o avanço das discussões sobre o ensino de probabilidade em sala de aula. Uma das fragilidades apresentadas nessa pesquisa, é a não vivência de um processo interventivo sobre probabilidade subjetiva, o que acreditamos que seria de grande ajuda na compreensão de suas variações concernetes ao aprendizado dos estudantes.

Palavras-Chave: educação probabilística; ensino médio; probabilidade subjetiva.

Abstract

This article is an excerpt from a master's research project that analyzed high school students' subjective knowledge of probability by applying a questionnaire. To this end, the questionnaire was designed to consider two aspects of subjective meaning: probability as a degree of belief and the use of probabilistic algorithms to support opinions about an event. The study is characterized as qualitative, of a field nature. Ten high school students from a public school

¹ Professor da Educação Básica e Estudante de Doutorado no Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

² Doutor em Educação Matemática – UNIBAN SP e Professor Adjunto da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Campus do Agreste.

³ Esta pesquisa foi financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).



located in the agreste region of Pernambuco took part in the study. The results show that the students have a satisfactory understanding of the variations in the subjective meaning of probability, with the greatest difficulty in making probabilistic calculations. The findings point to progress in discussions about the teaching of probability in the classroom. One of the weaknesses presented in this research is that we have not experienced an intervention process on subjective probability, which we believe would be of great help in understanding its variations concerning student learning.

Keywords: Probabilistic education; high school; subjective probability.

INTRODUÇÃO

Atualmente, a compreensão de fenômenos que têm sua natureza ligada à aleatoriedade se faz de necessidade ímpar, dada a quantidade de demanda exigida pela sociedade. No que se refere aos temas abordados na escola, a Probabilidade tem seu lugar desde um ponto de vista relativo à leitura de mundo e tomada de decisões fundamentadas em possibilidades. A escola, assim, se encontra como uma das principais instituições que devem promover o desenvolvimento dessas habilidades.

Embora a probabilidade tenha sua gênese alicerçada nos jogos de azar, registros históricos apontam para o desenvolvimento do estudo da aleatoriedade desde os gregos, com a manipulação do osso astrágalo. Assim como trocas de correspondências entre Pascal e Fermat, foi batizada como “geometria do acaso”, e ainda, no tratado de jogos de Cardano (1501-1576), as primeiras definições a respeito da mesma começam a surgir. Batanero (2005) elenca os principais significados que a probabilidade pode assumir (neste texto, a próxima seção será dedicada para isso), a saber: intuitivo, clássico, frequentista e subjetivo.

Entretanto, os currículos nacionais demoraram a inserir a probabilidade em suas áreas temáticas, tendo aparecido consolidada no Brasil a partir dos antigos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). A nível de Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), faz menção a probabilidade desde um ponto de vista teórico e social, pois a mesma fornece importantes ferramentas para o correto exercício cidadão dos estudantes. Mesmo assim, diferentes pesquisas (Santos, 2011; 2020) e avaliações externas, como o PISA, apontam para problemas de compreensão dos conceitos de probabilidade por parte dos nossos estudantes.

É consenso na área de investigação em ensino de estatística e probabilidade, que o processo de aprendizagem da probabilidade deve ser contemplado a partir da sua multiplicidade de significados, pois assim, a gama de aplicações desse conhecimento se dá de forma ampla (Batanero, 2005). Assim, apesar de não mencionar explicitamente os termos relativos à



probabilidade subjetiva em seu texto, a BNCC permite uma abertura para o avanço da compreensão de conceitos probabilísticos também a partir de seu significado subjetivo.

Com isto, este artigo apresenta um texto que discorre sobre as análises concernentes aos conhecimentos de probabilidade subjetiva de estudantes de Ensino Médio de uma escola do Agreste Pernambucano, se caracterizando como um recorte de pesquisa de mestrado. As próximas seções irão discorrer sobre as bases teóricas, métodos e resultados desse micro estudo.

SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE

Compreendemos que nenhum saber tem sua gênese absoluta e estática, ou seja, até chegar às formas atuais, são muitas as mudanças e acréscimos que o fazem evoluir. Com a probabilidade não foi diferente. Desde os primórdios, onde a mesma foi tratada como uma ciência de jogos de azar, seu principal objetivo era maximizar os ganhos ou produzir jogadas com as maiores chances de vitória. Esta, assumiu diferentes nuances, as quais Godino, Batanero e Cañizares (1987) chamam de significados de probabilidade.

Nesse sentido, os autores apresentam dois tipos de significados, os quais, por sua vez, tem diferentes naturezas. O primeiro deles, significado pessoal, diz respeito às formas com que um determinado saber tem a sua essência mais intrínseca a cada pessoa. Já o significado institucional, o qual é tratado neste artigo, tem sua relação direta com o conceito do ponto de vista epistemológico, suas características e sua razão de ser. Assim, iremos tratar dos quatro principais significados da probabilidade no que tange o nível da Educação Básica, a saber: o intuitivo, clássico, frequentista e subjetivo (que terá uma seção especial neste texto).

No que se refere ao significado intuitivo, destacamos como sendo o nosso primeiro contato com probabilidade, onde a quantificação não passa por um processo numérico, mas sim de semântica, com o uso de termos e expressões vinculadas ao vocabulário probabilístico, tais como: certo, impossível, pouco provável, muito provável, entre outras. Nesse contexto, as declarações de probabilidade não necessariamente atendem aos princípios matemáticos propostos por Andrei Kolmogorov, que delimitam características formais da construção do saber probabilidade.

Ao expressar declarações do tipo “é muito provável que chova amanhã” e “peça ao seu pai, é mais provável que ele te dê o que você quer pedir”, na maioria das vezes não notamos o que realmente está em ação nesse momento, que é nosso conhecimento de probabilidade. O significado intuitivo está presente nesse contexto ao passo que estamos declarando a chance de



acontecimento de um evento sem utilizar propriamente algoritmos que justifiquem e quantifiquem essas expressões.

O significado clássico foi o primeiro movimento de formalização para quantificar numericamente a chance de acontecimento de um evento. Nas trocas de correspondências entre Pascal e Fermat, já havia menção à probabilidade como “a geometria do acaso”, bem como nas obras de Cardano, quando este elaborou o Tratado dos Jogos (Mlodinow, 2018). No entanto, somente na obra de De Moivre (1718) encontra-se uma definição formal da mesma:

Portanto, se construirmos uma fração cujo numerador é o número de chances (possibilidades) com a qual um evento poderia ocorrer e o denominador é o número de chances com as quais pode ocorrer ou falhar, essa fração será uma definição própria da chance de ocorrência de um evento. (Batanero, p.29, 2005 apud De Moivre, 1718, p.1)

Entretanto, essa definição foi aperfeiçoada por Laplace, em 1814, quando este a enunciou como a proporção entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Nota-se que essa definição não responde ao que realmente é a probabilidade, e ainda mais, trata-se de uma interpretação onde essa apresenta apenas espaços amostrais simétricos, o que sabemos que soa restritivo, dado o número de experimentos da vida real onde as coisas não possuem a mesma chance de ocorrência.

Nesse contexto, aparece o significado frequentista de probabilidade, onde a quantificação passa pela repetição de um determinado experimento e a observação de ocorrência de um evento a partir disso, de acordo com Bernoulli. À época, a demonstração da Lei dos Grandes Números (LGN) ajudou que esse significado tomasse forma, pois a mesma permite uma comparação da chance de ocorrência de um evento a priori com a repetição, a posteriori. A essas repetições, deu-se o nome de Ensaios de Bernoulli.

Sem embargo, esse significado aos poucos foi sendo questionado de acordo com suas limitações, principalmente por dois aspectos: (a) o que acontece quando os experimentos não podem ser repetidos em igualdade de condições, como, por exemplo, experimentos ligados à economia e História? (b) Qual seria o número mínimo de repetições para que uma declaração de probabilidade por meio de estabilização de frequências seja válida? A partir desses questionamentos, percebeu-se que o significado frequentista ainda carecia de alguns aspectos para responder aos problemas probabilísticos. Com isso, desponta o significado subjetivo de probabilidade, que será detalhado na próxima seção.



SIGNIFICADO SUBJETIVO DA PROBABILIDADE

O significado subjetivo de probabilidade surge ampliando o número de aplicações que podem ser respondidas por meio de cálculos probabilísticos. O mesmo dispensa a repetição de experimentos em igualdade de condições, dando assim, a possibilidade de quantificar chances de ocorrência de eventos que outrora não puderam ser medidos, tais como problemas de diagnóstico, História, economia, entre outros.

Em sua composição, o Teorema de Bayes se mostra de importância ímpar, uma vez que com ele é possível transformar as probabilidades a priori de um evento em probabilidades a posteriori, que incorporam informações observadas em razão da ocorrência do evento. Nesse sentido, Ramsey, Keynes e De Finetti definem esse significado como grau de crença pessoal que se baseia na experiência e no conhecimento de quem declara uma probabilidade, uma vez que a probabilidade declarada depende de um sistema de conhecimentos prévios (Batanero, 2005).

Todavia, em sua gênese, o significado subjetivo encontrou um problema, que foi encontrar uma regra matemática que pudesse responder à quantificação da chance de ocorrência de um evento incorporando o grau de crença pessoal de quem a comunica. Quem respondeu a esse imbróglio foi Ramsey e De Finetti, que deduzem a Teoria da Decisão, onde as crenças se separam das preferências, e a probabilidade nesse sentido, enfim, pode ser quantificada (Batanero, 2005).

Assim, a probabilidade subjetiva toma diferentes aspectos relacionados à sua essência, destacando-se as probabilidades condicionais, independência, teorema de Bayes, teoria da decisão, entre outras (Ross, 2010). Com isso, dado o nível do público dessa pesquisa (Ensino Médio), o enfoque estará sobre os aspectos de coerência na atribuição de probabilidades, probabilidade condicional e inserção de desdobramentos ocorridos a partir de um dado experimento que se relacionam com a análise de ocorrência de um determinado evento.

No que tange as pesquisas em probabilidade subjetiva no âmbito de sala de aula, três estão em posição de destaque: a pesquisa de Rast (2005) e de Moreira (2015). Rast utilizou um método de trabalho em divisão de dois grupos que receberiam a mesma instrução em probabilidade do ponto de vista didático, mas com diferentes abordagens no tocante aos significados da probabilidade; o grupo teste com probabilidade subjetiva, e o grupo controle com instrução clássica de probabilidade. Ao fim, por meio de um teste estatístico, foi encontrada uma diferença significativa com relação ao desempenho dos grupos, no qual o grupo teste



obteve desempenho ligeiramente melhor que o grupo controle.

Já a pesquisa de Moreira, desenvolvida no Brasil, com estudantes de Ensino Médio, teve abordagem de probabilidade subjetiva em conjunto com aspectos da Teoria da Decisão (parte do significado subjetivo de probabilidade), com diferentes contextos de vida, tais como ciência forense, jogos, entre outros. Ao fim, a mesma conclui que os estudantes além do ganho acadêmico, com a compreensão de conceitos probabilísticos, também obtiveram boa desenvoltura na comunicação e socialização de declarações probabilísticas e engajamento com as atividades.

Corroboramos com Batanero (2005), ao afirmar que os significados de probabilidade não são estanques, ou seja, desenvolver atividades de probabilidade subjetiva não necessariamente implica em deixar em segundo plano outros significados, que também possuem importância na ampla compreensão do saber Probabilidade. Assim, o enfoque da pesquisa principal desenvolvida está na articulação dos conhecimentos de probabilidade subjetiva, bem como aspectos que o ligam a outros contextos.

PERCURSO METODOLÓGICO

Visando discutir conhecimentos de probabilidade subjetiva a partir de um questionário, adotamos a metodologia de pesquisa qualitativa no tocante ao tratamento dos dados. Já o estudo proveniente da dissertação, foi uma pesquisa de campo, que obteve a coleta dos dados junto aos participantes em questão (Gil, 2007). Os participantes dessa pesquisa foram 10 estudantes escolhidos aleatoriamente entre os terceiros anos do Ensino Médio de uma escola estadual localizada no Agreste de Pernambuco. O questionário aqui apresentado foi respondido pelos estudantes como última parte da pesquisa principal conduzida para elaboração da dissertação.

ELABORAÇÃO DO QUESTIONÁRIO: INTENCIONALIDADES E ESTRUTURAÇÃO

O questionário aqui apresentado versou sobre situações cotidianas a respeito da faixa etária dos estudantes (15 a 18 anos), de modo que fosse possível, ao responder as questões, que os participantes utilizassem de suas experiências pessoais, bem como de seus sistemas de conhecimentos prévios a respeito das situações apresentadas. Batanero (2005) destaca que essa perspectiva faz parte dos conhecimentos em probabilidade subjetiva.

No quadro abaixo, destacamos as principais perspectivas as quais elaboramos cada item



do questionário, bem como cada conhecimento necessário para resolução adequada das questões. Em seguida, iremos discutir os problemas item a item.

Quadro 1 – detalhamento das perspectivas do questionário: primeiro bloco

Questionário de Probabilidade Subjetiva		
Situação 1: encontro romântico		
Item	Objetivo	Conhecimento de probabilidade subjetiva avaliado
A	Verificar a atribuição de uma probabilidade com base no sistema de conhecimentos e experiência existentes.	Atribuição numérica da quantificação de probabilidades.
B	Elucidar quais conhecimentos foram utilizados para declarar a probabilidade em (a).	Conhecimentos prévios acerca do evento em questão.
C	Verificar como a incorporação de uma nova informação afeta a probabilidade a priori atribuída em (a).	Atribuição de probabilidade a posteriori.
D	Verificar se há crença sobre a probabilidade ser afetada por informações iniciais disponíveis.	Crença pessoal na probabilidade.

Fonte: o autor

Abaixo apresentamos o primeiro bloco do questionário e suas respectivas discussões dentro do nosso marco teórico de probabilidade subjetiva.

Quadro 2 – Primeiro bloco de questionamentos

De acordo com a situação acima, responda aos questionamentos que se seguem. Considere o seguinte evento: “Recomendar o filme *UM AMOR PARA RECORDAR* para assistirem juntos”.

SINOPSE



7 de fevereiro de 2003 No cinema / 1h
52min / Romance, Drama
Direção: Adam Shankman
Roteiro: Nicholas Sparks
Elenco: Mandy Moore, Shane West, Peter Coyote
Título original: A Walk to Remember

Em plenos anos 90, Landon Carter (Shane West) é punido por ter feito uma brincadeira de mal gosto em sua escola. Como punição ele é encarregado de participar de uma peça teatral, que está sendo montada na escola. É quando ele conhece Jamie Sullivan (Mandy Moore), uma jovem estudante de uma escola pobre. Com o tempo Landon acaba se apaixonando por Jamie que, por razões pessoais, faz de tudo para escapar de seu assédio.

Disponível em: <<<https://www.adorocinema.com/filmes/filme-40910/>>>.

a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.

c) Imagine agora: você abre o Instagram do seu/sua crush e vê que ele é fã de Heavy Metal. Agora, sabendo disso, qual a probabilidade de você **não** recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

d) Você acredita que sua experiência sobre algo influencia a tomada de decisão no cotidiano?



Fonte: o autor

Os questionamentos apresentados versam sobre diferentes facetas da probabilidade subjetiva. Nesse primeiro bloco, a intenção principal foi a comunicação de probabilidades por meio do aspecto intuitivo, ou seja, a valorização do sistema de conhecimentos prévios se sobressaiu aos algoritmos probabilísticos. Em um primeiro momento, a intenção foi que o estudante passasse a ter mais afinidade com a temática e esboçasse seu conhecimento sem a pressão da dicotomia do certo/errado por meio de cálculos.

O item (a) aborda a mensuração de probabilidade como grau de crença no acontecimento de um evento e sua interligação com a tomada de decisão (Ross, 2010). No item (b), é pedida a razão pela qual foi atribuída a porcentagem no item (a), para que, assim, possam ser avaliadas as razões pelas quais o estudante tomou a decisão de declarar sua probabilidade acerca do evento. Espera-se que a resposta seja baseada na experiência do estudante com a temática, bem como seus conhecimentos prévios sobre a situação.

Já o item (c) aborda a inserção de um acontecimento e como isso deve modificar a quantificação da probabilidade a priori escolhida para o item (a). No entanto, a pergunta é direcionada justamente ao evento A^c : a probabilidade de não recomendar o filme. A intenção do item tanto é verificar como a informação afeta a probabilidade a priori, quanto verificar se a quantificação intuitiva do estudante respeita o axioma de Kolmogorov $P(A) + P(A^c) = 1$. Já o item (d) aborda apenas as significações pessoais a respeito do uso da probabilidade pelos estudantes, se eles já percebem como a utilização da probabilidade auxilia as decisões tomadas no cotidiano. A seguir, discutiremos o segundo bloco de atividades.

Quadro 3 – Segundo bloco de atividades

Questionário de Probabilidade Subjetiva		
Situação 2: excursão escolar		
Item	Objetivo	Conhecimento de probabilidade subjetiva avaliado
E.1	Verificar a atribuição de probabilidade por meio da quantificação via cálculo.	Eventos sucessivos e teorema de probabilidade.
E.2	Verificar a atribuição de probabilidade por meio intuitivo, utilizando da estratégia resolvida no item (e.1).	Atribuição de probabilidade como grau de crença.
E.3	Identificar a proximidade dos estudantes com a utilização de conceitos probabilísticos.	Nenhum.
E.4	Verificar as razões de atribuição de probabilidade ao item (e.2).	Identificação de razões na atribuição de probabilidade como grau de crença.

Fonte: o autor



Neste segundo bloco, as intenções com relação aos aspectos de atribuição de probabilidade permanecem praticamente os mesmos, no entanto, a situação motivadora começa com a apresentação de dados em forma percentual e com a utilização de cálculos probabilísticos para ajuda nas tomadas de decisão avaliadas. Abaixo, apresentamos o segundo bloco do questionário.

Quadro 4 - segundo bloco do questionário: situação 2

e) Considere o cenário 2 e responda às questões que se seguem.

Em uma excursão de colégio, sabe-se que 70% dos estudantes adoram baladas de funk. Entre o grupo que adora esse tipo de balada, sabemos que 20% gostam de música clássica. Já entre os estudantes que não gostam de baladas de funk, 40% curtem músicas clássicas.

e.1) Qual a probabilidade de, ao escolher uma pessoa aleatoriamente dessa excursão, a mesma gostar de música clássica?

e.2) Imagine que você encontrou uma pessoa e a mesma gosta de funk. Qual a probabilidade de você colocar uma música clássico num possível *date* entre vocês?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade?

e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta e.2.

Fonte: o autor

Na abordagem desse problema, o item (e.1) questiona o estudante a respeito da probabilidade de uma pessoa dessa excursão gostar de música clássica. A maneira de responder ao problema pode ser esboçada de diferentes formas, desde a utilização da regra do produto, até o mapeamento do problema por meio da árvore de possibilidades. Ao fim, a intenção implícita é que a resposta seja extraída por meio dos dados apresentados na contextualização.

Já o item (e.2) utiliza a mensuração de probabilidade no contexto de grau de crença, no entanto, nesse sentido, espera-se que a probabilidade atribuída seja baixa, dado o número baixo de pessoas que gostam de funk e música clássica ao mesmo tempo. Ou seja, a tomada de decisão, em tese, deveria ser guiada pelo que os números apontam. Destacamos que esse tipo de cálculo já está presente nas recomendações da BNCC e do Currículo do Ensino Médio do Estado de Pernambuco (local onde o questionário foi aplicado).

Com isso, os itens (e.3) e (e.4) objetivam envolver o estudante no centro da discussão, ao colocar em jogo seus conhecimentos prévios e suas percepções correspondentes. Ao final, esse questionário visa mapear conhecimentos que os alunos são capazes de apresentar ao se depararem com situações de realidade e que envolvam a tomada de decisão a partir de conhecimentos probabilísticos. Assim, por meio de duas situações-problema, uma envolvendo



cálculo como instrumento quantificador e a outra utilizando a gama de conhecimentos prévios de cada participante da pesquisa, entendemos que os resultados podem apontar possíveis caminhos para direcionar os processos de ensino e aprendizagem do saber probabilístico.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os critérios de análise para cada problema se baseiam nas expectativas de resposta aos itens do questionário. O problema de probabilidade subjetiva foi levado no último encontro com os estudantes durante a pesquisa de mestrado, e para que os mesmos pudessem responde-lo, foram efetivadas duas divisões: uma seção de probabilidade subjetiva mais voltada às experiências e intuições, e outra com a inserção do cálculo probabilístico. Abaixo, analisamos a primeira seção, com distribuição dos indicadores conforme o quadro seguinte:

Quadro 5 - disposição dos indicadores de probabilidade subjetiva no problema

Item	Descrição
A	<ul style="list-style-type: none">▪ Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.▪ Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.
C	<ul style="list-style-type: none">▪ Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento.▪ Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.
D	<ul style="list-style-type: none">▪ Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.

Fonte: o autor

Na primeira seção, foi tratado de um tema recorrente ao contexto dos participantes, pois foi referente a encontros e a maneira como os mesmos iriam se desenvolver. Primeiramente foi apresentada uma sinopse de filme, e em seguida, no item (a), os participantes foram perguntados à respeito da probabilidade de que eles escolhessem o referido filme para assistir junto ao parceiro de encontro. As respostas de todos eles foram elencadas em forma de porcentagem, e, junto com essa análise, inserimos o item (b), que perguntava à respeito do porquê de cada resposta. Percebeu-se que todas as respostas foram baseadas no gosto e experiência pessoal dos estudantes, como se pode perceber nas respostas dos participantes A01 e A09.

Figuras 1, 2 e 3 – respostas dos participantes A01 e A09



a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
---------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.

nunca ouvi falar deste filme, não escolheria ele, tenho outros tipos de filme para assistir.

a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.

Sim, porque é interessante a história de Landon e Jamie

Fonte: dados da pesquisa

Nota-se acima como as respostas tiveram direcionamento a partir da mobilização pessoal dos gostos e experiências dos estudantes, convergindo com o Indicador número 4, assim, entende-se que o conhecimento apresentado para os itens (a) e (b) estão de acordo com as demandas necessárias para atribuição de probabilidade como grau de crença em um evento.

Já no que e refere aos itens (c) e (d), optou-se por permitir verificar se existiria coerência com a resposta dada no item (a), mesmo com a adição de uma nova informação, envolvendo assim o indicador número 3 (Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento).

Assim, a expectativa ao adicionar uma nova informação foi correlacionar os itens (a) e (c) de modo que houvesse a mensuração de o quanto as respostas eram complementares, já que o item (a) questionava a respeito da probabilidade de indicar o filme para assistir e o item (b) mencionava a probabilidade de não indicar o filme para assistir. Abaixo levantamos as porcentagens atribuídas nos itens (a) e (c).

Tabela 1 – confronto das probabilidades nos itens a e c

Estudante	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10
Item (a)	0%	10%	60%	0%	70%	0%	10%	50%	70%	10%
Item (b)	80%	90%	50%	80%	40%	100%	80%	50%	30%	90%
Diferença	-20%	0%	10%	-20%	10%	0%	-10%	0%	0%	0%

Fonte: o autor (dados da pesquisa)

Nessa questão, admitimos uma diferença entre os eventos complementares de até 10% para mais, porque uma nova informação foi inserida (abriu-se o instagram da pessoa que estava no encontro, e a mesma seria uma roqueira), podendo assim, fazer com que os estudantes aumentassem a probabilidade de não recomendar sem levar em conta a resposta dada ao item



(a).

No entanto, percebe-se que as respostas estão coerentes no sentido de serem eventos complementares. Dado que a situação envolve uma tomada de decisão a partir dos dados, os participantes apresentaram graus de crença condizentes com a probabilidade formal, nesse caso, subjetiva. Ao analisar as respostas, percebe-se que o maior afastamento entre as somas das probabilidades foi de -20%, nas respostas dos participantes A01 e A04.

Nesse sentido, Batanero (2005) reforça que a probabilidade subjetiva pode ser distinguida da intuitiva no ponto em que a primeira foi axiomatizada, assim, obedecendo aos Axiomas de Kolmogorov. Com isso, identificam-se cinco respostas dos participantes que obedecem exatamente ao Axioma $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, ou seja, a probabilidade de um evento somada com o complementar do mesmo, será sempre 100%. Nenhuma das pesquisas elencadas na revisão de literatura (Rast, 2005; Moreira, 2015; Di Bernardo, 2019) trabalhou com esse tipo de atividade, portanto aqui não há como tomar parâmetros com pesquisas anteriores.

Já no que se refere ao item (d) “Você acredita que sua experiência sobre algo influencia na tomada de decisão sobre algo?”, os participantes foram unânimes em dizer que sim, pois a experiência pauta as decisões. Aqui, caberá correlação com a resposta dada a outro item presente na segunda parte desse questionário, que será retomada na próxima seção.

Nesse primeiro bloco, os dados apontaram para uma ampla compreensão do significado subjetivo de probabilidade por parte dos participantes, quando a situação envolveu apenas as experiências pessoais e tomada de decisão fundamentadas nas mesmas. Houve coerência na atribuição de probabilidades entre eventos complementares, e as tomadas de decisão foram pautadas em experiência e análise de eventos concomitantes.

Na segunda parte do novo problema, o direcionamento dos itens foi semelhante ao citado anteriormente, com uma única mudança: na segunda seção a primeira situação envolveu um problema onde o instrumento de quantificação a priori foi algorítmico, com uma situação a ser resolvida com a árvore de possibilidades. Abaixo, descrevemos a composição de cada item conforme os indicadores de probabilidade subjetiva.

Quadro 6 – distribuição de indicadores na seção 2

Item	Descrição
E.1	<ul style="list-style-type: none">▪ Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “$P(A B)$, $P(B A)$”▪ Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn.

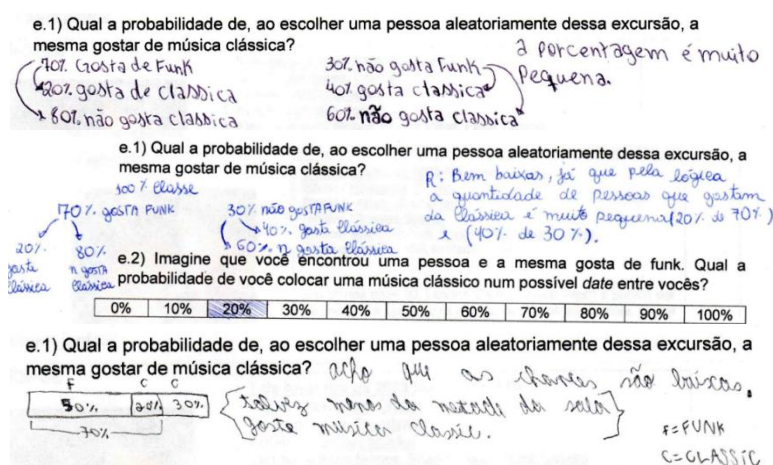


	<ul style="list-style-type: none">▪ Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.
E.2	<ul style="list-style-type: none">▪ Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial▪ Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “$P(A B)$, $P(B A)$”▪ Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.

Fonte: o autor

O item e.1 envolveu uma solução para o problema proposto na situação 2, que demandava conhecimento de cálculo probabilístico por um diagrama de árvore ou mesmo eventos sucessivos. Nesse sentido, nenhum estudante conseguiu chegar à resposta adequadamente, mesmo que alguns tenham desenvolvido esquemas para interpretar a questão, como podemos ver abaixo.

Figuras 4, 5 e 6 – esquemas para resposta ao item e.1 dos participantes



Fonte: dados da pesquisa

Convém destacar como as interpretações se direcionam de maneira coerente nos esquemas, mas existe indecisão quanto a forma de continuar o desenvolvimento. Eles identificam que a porcentagem é pequena, o que aponta para a compreensão geral da situação, mas não conseguem desenvolver os cálculos pertinentes.

Já o item (e.2), “Imagine que você encontrou uma pessoa e a mesma gosta de funk. Qual a probabilidade de você colocar uma música clássico num possível *date* entre vocês?”, envolve uma tomada de decisão que depende da compreensão adequada do item (e.1). Destaca-se que os cálculos não foram efetuados em (e.1), no entanto os estudantes perceberam que a probabilidade de uma pessoa gostar de música clássica era baixa nesse contexto. Nesse item não foram elencadas respostas corretas ou não, mas havia a expectativa de que a probabilidade atribuída fosse baixa, dado que apenas 20% dos estudantes que gostam de funk também gostam



de música clássica.

Tabela 2 – percentagens atribuídas no item e.2

Porcentagem	0%	10%	20%	30%
Frequência de atribuição	3	3	3	1

Fonte: o autor (dados da pesquisa)

Com isso, nenhuma resposta ultrapassou a marca de 30%, mostrando assim como a compreensão da situação no geral se deu de forma coerente. Para além disso, com uma análise conjunta ao item e.4, pode-se explicar de que forma os participantes decidiram atribuir as probabilidades do item e.2. Abaixo, algumas das respostas.

Figuras 7, 8 e 9 – justificativas das respostas do item e.2

e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta

e.2.

Sim, há chances de quem detesta música clássica e se sentir desconfortável (ficar irritado).

e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta

e.2.

EU SEI QUE 20% DAS PESSOAS QUE GOSTAM DE ROCK TAMBÉM TAMBÉM GOSTAM DE MÚSICA CLÁSSICA.

e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta

e.2.

Sim, há chances de quem detesta música clássica e se sentir desconfortável (ficar irritado).

Fonte: dados da pesquisa

Percebe-se que as justificativas versam sobre o risco de colocar a música clássica e a pessoa não gostar do gênero musical, assim, retomando a baixa probabilidade de uma pessoa gostar de funk e música clássica. Atribuir uma probabilidade baseada nos dados e não apenas nas crenças pessoais é uma demanda presente no Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), e levada em consideração na elaboração desse problema, junto aos indicadores de probabilidade subjetiva.

Também se destaca a forma satisfatória com que a mensagem $P(A|B)$ foi interpretada pelos participantes, pois para serem coerentes com a atribuição de probabilidade para o item e.2, era necessário o entendimento da mensagem “gostar de música clássica, dado que gosta de funk”. O índice de baixa porcentagem atribuído pelos participantes aponta para a leitura correta do questionamento.

Por fim, o item e.3 “Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade?” levantou a



possibilidade de reflexão por parte dos estudantes enquanto suas tomadas de decisão. As respostas dos participantes apontam para percepções de como a probabilidade está presente em suas declarações e decisões. Abaixo, algumas delas.

Figuras 10, 11 e 12 – respostas do item e.3

e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? *também o costume de dizer "provavelmente", ao dizer isso estamos falando de Probabilidade*

e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? *sim kkkk, usar a lógica para tentar solucionar as questões, ou pelo menos buscando encontrar uma lógica da questão.*

e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? *também o costume de dizer "provavelmente", ao dizer isso estamos falando de Probabilidade*

Fonte: dados da pesquisa

As respostas fizeram menção inclusive ao vocabulário probabilístico, tão comum em nosso cotidiano, ao atribuir graus de crença para determinados eventos. Atentando-se ao fato de como as probabilidades subjetivas da primeira seção foram condizentes com as lógicas formais do saber probabilidade, infere-se que as questões subjetivas do significado de probabilidade são atendidas de forma linear, mostrando assim que os estudantes são capazes de organizar seus pensamentos em torno de uma lógica formal de probabilidade, mesmo que os detalhes envolvendo cálculo ainda estejam incipientes ou mal compreendidos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste micro estudo, ressaltamos a desenvoltura apresentada pelo grupo de estudantes em relação ao saber Probabilidade Subjetiva, que demonstraram relativo domínio das nuances pertencentes ao grupo de conhecimento subjetivo, mesmo não tendo sido vivenciado um processo interventivo sobre o conteúdo. Tais apontamentos nos permite inferir que mesmo no modelo atual de abordagem a respeito de probabilidade, há espaço para avanços na discussão do conceito em sala de aula.

No tocante à elaboração da sequência de atividades, o foco foi posto sobre dois pontos de vista da probabilidade subjetiva: da experiência e avaliação de probabilidades como crença pessoal, e da utilização de algoritmos probabilísticos como instrumentos para atualização de opinião em relação a situações diversas. Nesse sentido, o primeiro aspecto apresentou compreensão significativa por parte dos estudantes, ao apresentarem coerência na atribuição de



probabilidades, nas justificativas a respeito das respostas e na articulação de conhecimentos existentes para declarar probabilidades. Já quanto às situações que demandaram manipulação algorítmica, as dificuldades apresentadas residiram justamente na elaboração dos cálculos, o que, em tese, já vem sendo discutido em outras pesquisas.

Também cabe uma menção a respeito das situações contextuais apresentadas no questionário, em comparação com outras pesquisas sobre livros didáticos, que apontam para problemas majoritariamente de contextos fictícios, o que pode acarretar na dificuldade transpor o conhecimento aplicado no livro didático para a vida real. A dissociação entre *a matemática da escola* e *a matemática da vida* já não se justifica nos dias atuais.

Por fim, encontramos nos resultados subsídios importantes para o avanço das discussões a respeito do ensino de probabilidade, no intuito de alargar a gama de problemas vivenciados em sala de aula. Os conhecimentos apresentados pelos estudantes corroboram com o pensamento de que a vivência da probabilidade por meio da diversificação de significados produz fenômenos de aprendizagem mais completos e com a capacidade de auxílio no sentido de fornecer aos jovens a oportunidade de ler e participar do mundo em que vivem por meio da educação.

Uma das fragilidades apresentadas nessa pesquisa, é a não vivência de um processo interventivo sobre probabilidade subjetiva, o que acreditamos que seria de grande ajuda na compreensão de suas variações concernetes ao aprendizado dos estudantes. Como indicação de pesquisas futuras, recomendamos a elaboração conjunta de formação de professores, intervenções em sala de aula e preparação de materiais que se adequem aos múltiplos significados da probabilidade.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 8, n. 3, p.247-263, nov. 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.

DI BERNARDO, R.; MELLONE, M.; MINICHINI C.; RIBEIRO, M. Subjective Approach to probability for accessing prospective teacher's specialized knowledge. In: **Proceedings of the**



43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2019, Pretoria, Sputh Africa: PME, p.177-184.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2007.

GODINO, J. D., BATANERO, C., CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.** Madrid: Síntesis, 1987.

MLODINOW, Leonard. O andar do bêbado. Zahar. 2018.

MOREIRA, A. P. M. **Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em sala de aula do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas. Campinas – SP, p.203, 2015.

RAST, J. D. **A Comparison of Learning Subjective Probability and Traditional Probability in Middle Grades.** Tese (Middle Secondary Education Program) – Georgia State University. Georgia – USA, p.144, 2005.

ROSS, S. **Probabilidade:** Um curso moderno com aplicações. 8 E



AUTORES

Autor 1

Anderson Rodrigo Oliveira da Silva
Mestre e Doutorando em Educação Matemática e Tecnológica – PPG Edumatec
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Centro de Educação (CE)
E-mail: ander.rodrigosl@gmail.com
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6704-0512>

Autor 2

José Ivanildo Felisberto de Carvalho
Doutor em Educação Matemática – UNIBAN SP
Professor Adjunto da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – Campus do Agreste
E-mail: ivanildo.carvalho@ufpe.br
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3981-4805>

Artigo Recebido em: 01/03/2024

Aceito para Publicação em: 01/07/2024